


ETUDE DES SYSTEMES TRIANGULÉS

DÉFINITION

Les systèmes triangulés sont des structures composées de barres droites (Profilés , L, T, I, U) assemblées entre elles (assemblages appelés noeuds) par rivets, boulons soudures.

Quelle que soit la nature des liaisons, les différents assemblages sont considérés comme articulés.

CARACTÉRISTIQUES

Ces systèmes présentent 2 caractéristiques essentielles :

- ☐ ils sont indéformables (au sens des liaisons mécaniques, et non au sens de la résistance des matériaux : les allongements sont proportionnels aux contraintes) ;
- ☐ les forces extérieures (charges) sont appliquées aux noeuds ; les barres sont soit tendues, soit comprimées.

STABILITÉ D'UN SYSTEME TRIANGULÉ

Un système triangulé est complet si l'élimination d'une seule barre risque de compromettre sa rigidité.

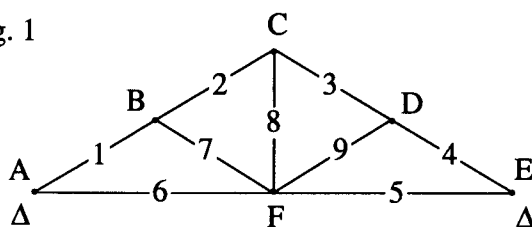
Un système triangulé est isostatique lorsque le nombre de barres (b) est lié au nombre de noeuds (n) par la relation suivante :

$$b = (2n) - 3$$

au delà, le système est surabondant ou hyperstatique.

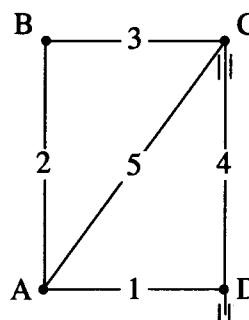
Quelques exemples :

Fig. 1



9 barres et 6 noeuds
 $9 = (2 \times 6) - 3$

Fig. 2



5 barres et 4 noeuds
 $5 = (2 \times 4) - 3$

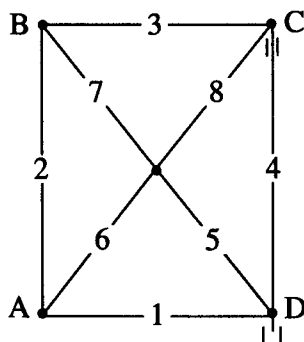


Fig. 3

Dans le cas ci-contre, la relation : $b = (2n) - 3$ n'est pas satisfaite ; une diagonale est surabondante.

8 barres et 5 noeuds
 $8 \neq (2 \times 5) - 3$

DÉFINITION DES SOLLICITATIONS EXERCÉES SUR LES BARRES

Une méthode pratique, méthode de Crémone (1) consiste à réaliser l'équilibre des forces (direction des barres) qui concourent à chaque noeud de la structure. Il suffit de traduire graphiquement que la somme géométrique est équipollente au vecteur nul. Le problème est soluble si le nombre des inconnues est limité à deux. La solution consiste donc à construire un dynamique fermé, suivant des parallèles aux barres.

Soit le système triangulé représenté ci-dessous (fig. 4).

Pour l'exemple, une charge unitaire de 1 000 N (2) est appliquée aux noeuds B, C et D. Par suite, les actions aux appuis A et E valent donc :

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{E}\| = -\frac{1\,000 \times 3}{2} = -1\,500 \text{ N}$$

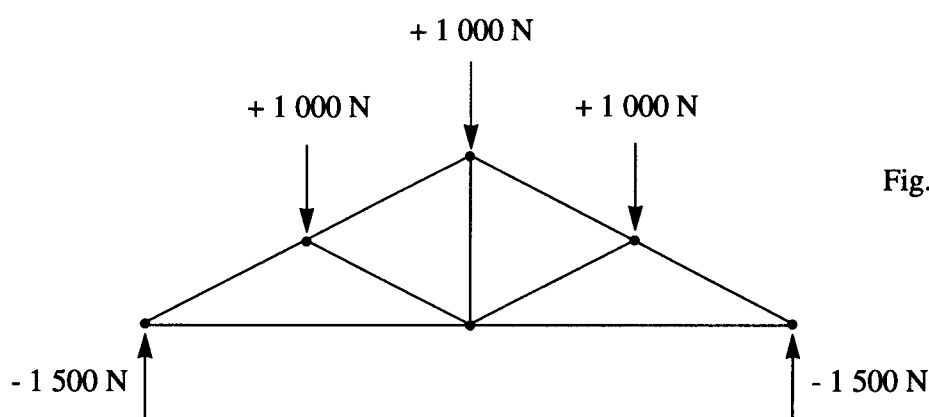


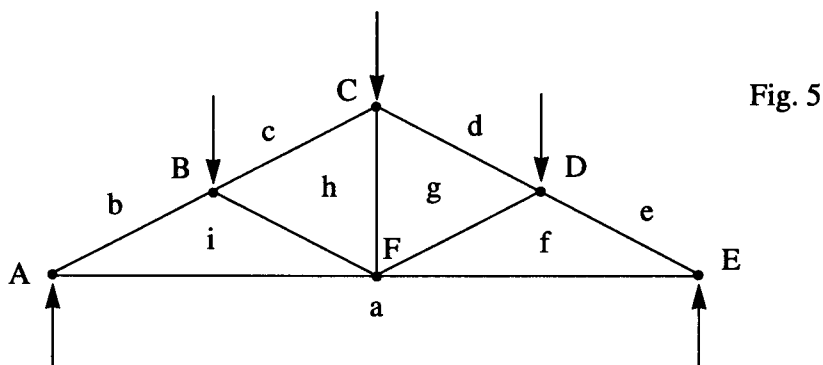
Fig. 4

(1) CREMONA Luigi, mathématicien italien (1830 – 1903)

(2) La définition et la pondération des charges sur les constructions sera traitée dans une prochaine étude de cas «Structures à inertie»

Repérage des forces (et des barres)

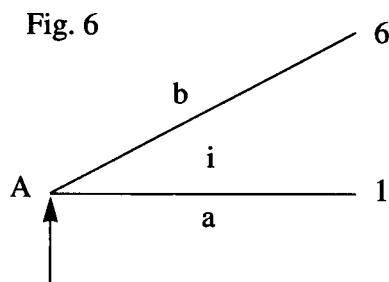
Le repérage de Carlo BOURLET (repérage par zones) a l'avantage d'autoriser la suppression de l'orientation des forces (flèches) sur le dynamique. Une force sépare deux zones (chaque barre supporte une force), soit le repérage proposé ci-dessous ; figure 5.



La zone (a) est donc délimitée par les actions aux appuis A et E, la zone (b) par les actions à l'appui A et au noeud B etc. Inversement, une force est donc délimitée par les deux zones qu'elle sépare. Par exemple, la force extérieure (charge) appliquée au noeud C sera donc repérée par les zones cd.

Orientation des forces (et repérage)

Isolons le noeud A de la structure (figure 4 et 5).



Si l'on choisit le sens horaire pour la lecture des forces autour du noeud, la 1ère force rencontrée et connue, l'action à l'appui A se lira : force \overrightarrow{ab} et se représentera avec pour origine (a) et pour extrémité (b).

Il reste donc à déterminer les forces inconnues \overrightarrow{bi} et \overrightarrow{ia} .

Construction du dynamique (du noeud A)

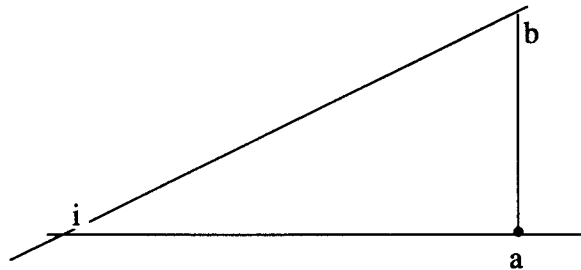
Faut-il rappeler que le dynamique correspond à l'équilibre des forces qui concourent au même point (ici le point A).

La première force à placer est la force \overrightarrow{ab} (action à l'appui A)
A) échelle des forces : 1 cm = 500 N



En fonction du sens de lecture (figure 6), la force suivante à situer est la force relative à la barre bi ; donc, à partir de l'extrémité de la force ab (point b), tracer la direction de la force bi (parallèle à la barre bi).

Fig. 7



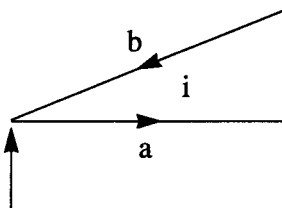
La dernière force rencontrée, est la barre (ia) – la direction de (ia) passe donc par le point (a) déjà situé – Il reste donc à mener une parallèle à la barre (ia) passant par le point (a).

Recherche du sens des forces agissant sur un noeud (ou du type de sollicitation des barres : compression ou traction)

L'orientation du dynamique (ou orientation des forces) figure 7, est fonction du sens de lecture défini précédemment figure 6.

- la force ab à l'appui (A) est verticale, (de a vers b) ; la force ab «se rapproche» du noeud, elle «pousse» sur le noeud. **La barre (ab) (poteau) est donc comprimée ;**
- la force suivante rencontrée est la force dans la barre (bi) (figure 6). La force bi , (figure 7), donc de sens (b) vers (i), \swarrow , pousse également sur le noeud. **La barre bi est donc également comprimée ;**
- enfin, la 3ème force rencontrée est la force ia . Donc de (i) vers (a), (\rightarrow a). La force ia «s'éloigne» du noeud, elle «tire» sur le noeud. **La barre (ia) est donc tendue.**

Le sens des forces sur le noeud (A) peut donc être représenté comme ci-dessous.



Le tableau, figure 10, rassemble les résultats de la lecture du crémona. L'échelle du tracé (1 cm = 500 daN - figure 9), permet d'évaluer l'intensité des forces, et le sens de lecture permet le classement : barres comprimées, barres tendues.

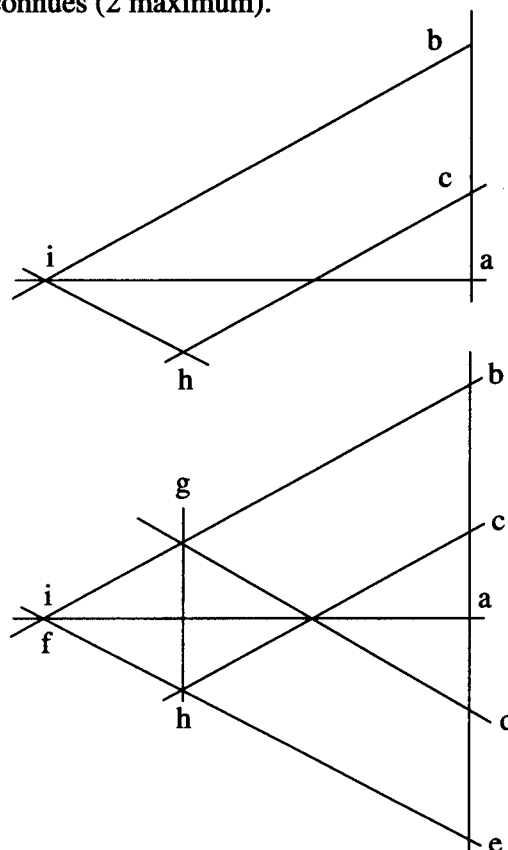
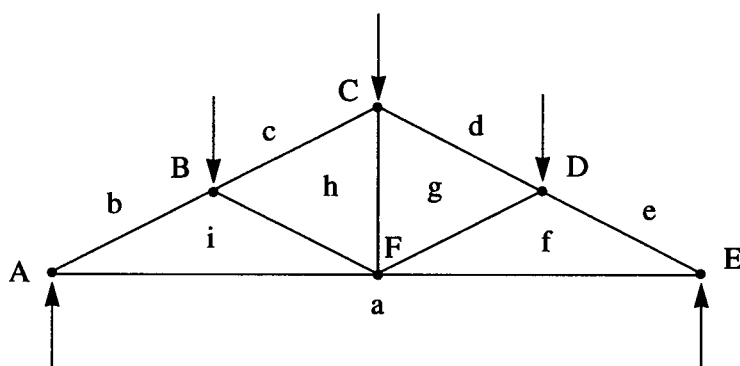
Construction de l'épure de Crémona

L'épure complète de Crémona, figure 9, correspond au tracé du dynamique de l'ensemble de la structure.

- définition des actions aux appuis – figure 4 ;
- tracé du dynamique relatif à l'un des deux appuis (par exemple : noeud A) – figure 7 ;
- tracé des différents noeuds, dans l'ordre du nombre d'inconnues (2 maximum).

Soit le tracé à présent du noeud (B) – figure 8

Tracé du dynamique relatif au noeud (B) à partir du noeud (A) déjà situé

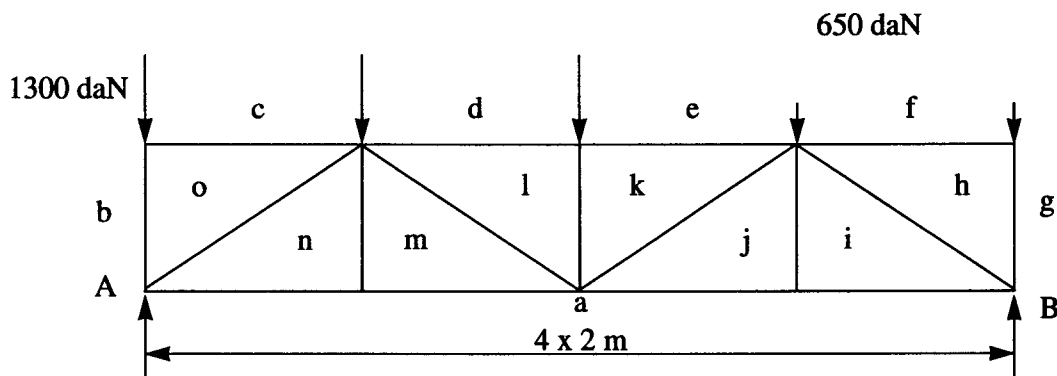


Enfin, figure 9, tracé de l'épure complète de Crémona – 1 cm = 500 N –

Résultats (figure 10)

Barres comprimées	Barres tendues
$bi = 3\,300 \text{ daN}$ $ch = 2\,250 \text{ daN}$ $hi = 1\,100 \text{ daN}$ $dg = 2\,250 \text{ daN}$ $ef = 3\,300 \text{ daN}$ $fg = 1\,100 \text{ daN}$	$ia = 2\,900 \text{ daN}$ $hg = 1\,050 \text{ daN}$ $af = 2\,900 \text{ daN}$

Autre exemple de structure triangulée



Définition des actions aux appuis A et B

– Recherche par le calcul, par exemple : équilibre des moments par rapport à l'appui (A) –

Σ des moments par rapport à (A) = 0

$$\vec{M}_A = (0 \times 1\,300) + (2 \times 1\,300) + (4 \times 1\,300) + (6 \times 650) + (8 \times 650) - (8 \times B) = 0$$

$$B = -\frac{16\,900}{8} = -2\,112,5 \text{ daN}$$

$$A = -(5\,200 - 2\,112,5) = -3\,087,5 \text{ daN}$$

Lecture des efforts dans les barres de la structure

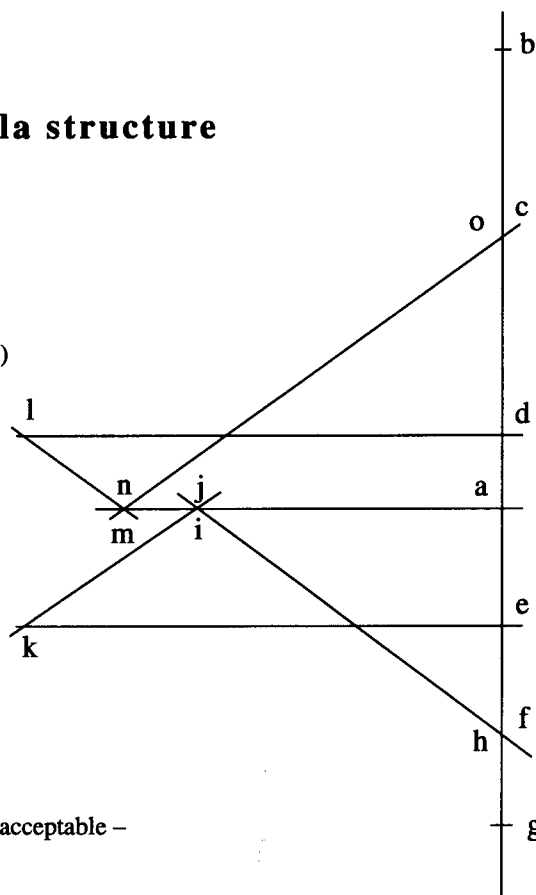
(Epure de Crémona figure 11)

Echelle des forces : 10 mm = 500 daN

$$\text{soit } A : ab = 61,5 \text{ mm} \implies ab = 3\,075,5 \text{ daN} \quad (1)$$

$$\text{soit } B : ga = 42 \text{ mm} \implies ga = 2\,112,5 \text{ daN}$$

Fig. 11



(1) différence de 12 daN, fonction de la position du tracé – différence acceptable –

Barres les plus chargées en traction

na = ma = 52 mm \Longrightarrow 2 600 daN

Barres les plus chargées en compression

dl = ek = 65 mm \Longrightarrow 3 250 daN

on = 64 mm \Longrightarrow 3 200 daN

– à noter que les barres : (co), (fh), (nm) et (ij) ne sont pas sollicitées –

VÉRIFICATION DE LA TENUE D'UNE BARRE À LA COMPRESSION (par exemple barre dl)

Lorsqu'un effort de compression est exercé sur une pièce courte (pièce dont la longueur est inférieure à dix fois environ sa plus petite dimension transversale), il se produit un raccourcissement élastique, proportionnel à l'effort, l'axe demeure rectiligne.

Dans le cas d'une pièce courte, la contrainte (σ_c) s'exprime de la façon suivante :

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A}$$

avec N_c = effort pondéré de compression en daN

A = section de la pièce en mm²

Dans le cas d'une pièce longue (élancée), au delà d'une certaine valeur de l'effort, il se produit une flexion transversale (flambage) qui risque d'entraîner la ruine de l'ouvrage.

En 1770, le mathématicien suisse Ferdinand Euler a déterminé une valeur de contrainte limite de flambement, formule qui sert toujours de référence aujourd'hui.

Dans le domaine élastique (1), cadre de cette étude, la formule simplifiée de détermination de la contrainte de flambement fait apparaître un coefficient de sécurité (K : coefficient de flambement) déterminé à partir de tableaux en fonction de l'élancement λ du profilé.

Soit la formule suivante :

$$\sigma_c = K \frac{N_c}{A}$$

(1) Dans le domaine plastique, domaine de calcul, permettant de tirer parti de la plastification du matériau donc de réduire les sections de profilés et par suite les coûts, un effort, (par exemple pour une pièce courte, un effort de compression N), ne doit pas être supérieur à l'effort de plastification de la section. Soit :

$$N \leq N_p$$

avec N_p = effort de plastification = $A_{eff} \times \sigma_e$

A_{eff} = aire efficace de la section (ou section réduite de calcul)

Dans le cas du flambement, la sollicitation N de compression simple doit satisfaire à la condition suivante :

$$K_o \frac{N}{N_p} \leq 1$$

avec K_o déterminé à partir de tableaux en fonction de l'élancement du profilé.

L'élancement λ d'un profilé est le rapport entre sa longueur de flambement l et son rayon de giration i :

$$\lambda = \frac{l_o}{i}$$

Longueur de flambement l

La longueur de flambement (l) est fonction des conditions d'attache aux deux extrémités.

Par exemple en cas d'encastrement aux deux extrémités, (figure 11) : $l = 1/2 l_o$

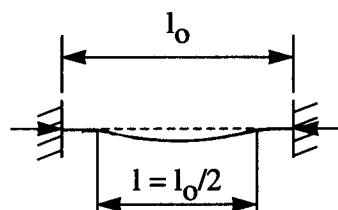


Fig. 11

En cas d'articulation aux deux extrémités, (figure 12): $l = l_o$

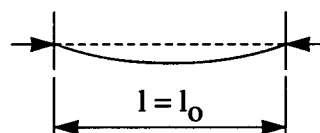


Fig. 12

Les valeurs de l , en fonction de la nature des liaisons, sont données sur formulaires

Par exemple, pour une structure triangulée :

	Membrures	Treillis
Plan de la structure	$l = 0,9 l_o$	$l = 0,8 l_o$
Plan perpendiculaire	$l = l_o$	$l = l_o$

Rayon de giration i

Le rayon de giration d'un corps est la distance du centre d'inertie au centre de gravité d'une masse fictive donnant le même moment d'inertie que ce corps.

Le rayon de giration (i) est donné sur formulaires et il a pour expression :

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

avec pour unités :

i en cm

I en cm⁴

A en cm²

Vérification de la barre dl – \square 40 x 40 x 4

Section A = 652 mm

Effort de compression N = 3 250 daN

Longueur d'épure $l_0 = 2$ m, donc $l = 0,9 l_0 = 180$ cm

Rayon de giration $i_x = 1,22$ cm

Rayon de giration $i_y = 1,64$

$$\text{Elancement } \lambda = \frac{l}{i} = \frac{180}{1,22} = 148$$

Soit, pour un élancement $\lambda = 148$, le coefficient K, défini sur le tableau figure 13, a pour valeur :
K = 3,591 d'où la contrainte σ_c de compression est égale à :

$$\sigma_c = K \frac{N}{A}$$

$$\sigma_c = 3,591 \frac{3\,250}{612} = 19,06 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_c < \sigma_e$$

CALCUL DES PIÈCES COMPRIMÉES – FLAMBEMENT

Valeurs du coefficient de flambement k en fonction de l'élancement.

Valeurs de k pour $\sigma_e = 24 \text{ kg/mm}^2$

Elan- cement λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.001	1.001	1.001	1.002	1.002	1.003
10	1.004	1.004	1.005	1.006	1.007	1.008	1.009	1.010	1.012	1.013
20	1.015	1.016	1.018	1.019	1.021	1.023	1.025	1.028	1.030	1.032
30	1.035	1.037	1.040	1.043	1.046	1.049	1.052	1.056	1.060	1.063
40	1.067	1.071	1.076	1.080	1.085	1.090	1.095	1.100	1.105	1.111
50	1.117	1.123	1.130	1.137	1.144	1.151	1.159	1.166	1.175	1.183
60	1.192	1.201	1.211	1.221	1.231	1.242	1.253	1.265	1.277	1.289
70	1.302	1.315	1.328	1.342	1.357	1.372	1.387	1.403	1.420	1.436
80	1.453	1.471	1.489	1.508	1.527	1.547	1.567	1.587	1.608	1.629
90	1.651	1.674	1.696	1.719	1.743	1.767	1.792	1.817	1.842	1.868
100	1.894	1.921	1.947	1.975	2.003	2.031	2.060	2.089	2.118	2.148
110	2.178	2.209	2.240	2.271	2.303	2.335	2.367	2.400	2.433	2.467
120	2.501	2.535	2.570	2.605	2.640	2.676	2.712	2.748	2.785	2.822
130	2.860	2.897	2.936	2.974	3.013	3.052	3.091	3.131	3.172	3.212
140	3.253	3.294	3.335	3.377	3.419	3.462	3.504	3.548	3.591	3.635
150	3.679	3.723	3.768	3.813	3.858	3.904	3.950	3.997	4.043	4.090
160	4.137	4.18	4.23	4.28	4.33	4.38	4.43	4.48	4.53	4.58
170	4.63	4.68	4.73	4.78	4.83	4.88	4.94	4.99	5.04	5.09
180	5.15	5.20	5.26	5.31	5.36	5.42	5.48	5.53	5.59	5.61
190	5.70	5.76	5.81	5.87	5.93	5.99	6.05	6.11	6.16	6.22
200	6.28	6.34	6.40	6.46	6.53	6.59	6.65	6.71	6.77	6.84
210	6.90	6.96	7.03	7.09	7.15	7.22	7.28	7.35	7.41	7.48
220	7.54	7.61	7.67	7.74	7.81	7.88	7.94	8.01	8.08	8.15
230	8.22	8.29	8.36	8.43	8.49	8.57	8.64	8.71	8.78	8.85
240	8.92	8.99	9.07	9.14	9.21	9.29	9.36	9.43	9.51	9.58
250	9.66	9.74	9.81	9.88	9.96	10.04	10.11	10.19	10.27	10.35
260	10.43	10.50	10.58	10.66	10.74	10.82	10.90	10.98	11.06	11.14
270	11.22	11.30	11.38	11.47	11.55	11.63	11.71	11.80	11.88	11.96
280	12.05	12.13	12.22	12.30	12.39	12.47	12.56	12.64	12.73	12.82
290	12.90	12.99	13.08	13.17	13.26	13.35	13.44	13.52	13.61	13.71
300	13.79									

Fig. 13 D'après document CTICM